А. Г. ТЯПИН
доктор технических наук

АО «Атомэнергопроект», г. Москва

УДК 624.042.7

О РОЛИ **ДЕМПФИРОВАНИЯ** В ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ **ПРИ РАСЧЕТЕ** НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ **ВОЗДЕЙСТВИЯ**

«Теперь нам не надо
По улицам мыкаться ощупью:
Машины нас ждут,
И ракеты уносят нас вдаль.
И все-таки-жаль,…»

Б. Ш. Окуджава

В статье обсуждаются вопросы вывода уравнений движения для линейных расчетов сооружений на сейсмические воздействия. Оказывается, здесь все еще остаются нетривиальные вопросы. Статья носит дискуссионный характер: автор не согласен с предложением коллег по включению в правую часть уравнений движения матрицы демпфирования. По мнению автора, ошибка может заключаться в использовании модели демпфирования Рэлея для правой части уравнения движения. Это противоречит физической логике, поскольку демпфирование в модели Рэлея не является целиком «внутренним»: оно благодаря участию матрицы масс работает на жестких смещениях системы, в отличие от внутреннего демпфирования. По убеждению автора, физическая логика должна иметь приоритет перед использованием тех или иных приближенных математических моделей, поэтому работу внутреннего демпфирования на жестких перемещениях надо исключать еще до того, как будут определяться те или иные модели внутреннего демпфирования. Вместе с тем автор ставит еще два вопроса о расчете усилий, по которым надеется услышать мнение коллег.

Ключевые слова: *сейсмическая реакция, модель демпфирования Рэлея, линейно-спектральный расчет, суммирование максимальных реакций.*

Булат Шалвович Окуджава имел в виду, конечно же, автомобили, но его слова, на мой взгляд, удивительным образом подходят и для машинных (они же компьютерные) расчетов. До начала компьютерных вычислений полезно осмыслить те уравнения, которые мы собираемся решать на компьютере; в противном случае расчеты действительно «унесут нас вдаль» - вдаль от реальности. Так что «машины нас ждут» - и пусть подождут еще немного.

Казалось бы, для линейного расчета сооружений на сейсмические воздействия все общие вопросы давно решены. Однако практика показывает, что все не так просто. Поводом для этой публикации послужили недавние выступления и публикации одного из ведущих отечественных специалистов в области компьютерных расчетов сооружений – Владимира Александровича Семенова [1,2]. Мы с ним знакомы со времен учебы на одной кафедре ДПМ Московского энергетического института у профессора (в те годы еще не академика) В.В.Болотина и не раз обсуждали нетривиальные вопросы в кулуарах различных конференций. Представляется, что некоторые моменты наших дискуссий могут быть интересны более широкому кругу читателей. Математика здесь весьма проста, основное внимание будет уделено физическим аспектам. Однако от читателя потребуется некоторое терпение, чтобы пройти по давно знакомым формулам и добраться до места, где начнутся нетривиальные выводы.

На самом деле, практически все сейсмические расчеты в идейном плане производятся по т.н. «платформенным моделям» [3] – даже если расчетчик в большинстве случаев этого не осознает. Платформенная модель по определению отличается наличием «платформы» (поверхности/совокупности узлов, движение которых задается расчетчиком), «верхнего строения» (модели сооружения, движение которой не задается, а вычисляется), а также «подвеса» (некоторой системы, соединяющей платформу и сооружение).

В наиболее простом случае «подвес» жесткий (т. е. узлы подошвы фундамента сооружения жестко связаны с узлами платформы, имеющими такие же координаты), а платформа совершает движение как жесткое целое по нескольким (от одной до шести) степеням свободы. Запишем уравнения колебаний такой системы, отождествив узлы подошвы фундамента с узлами платформы. Вывод уравнений движения начнем с работы с абсолютными перемещениями в неподвижной системе координат. Пусть платформа движется по одной степени свободы по закону (в перемещениях) $u_0(t)$. Обозначим перемещения всех узлов системы через столбец $U^+(t)$, состоящий из двух составленных вместе частей – столбца $U_b(t)$ перемещений узлов платформы (они же – узлы подошвы фундамента) и столбца $U(t)$ перемещений остальных (незакрепленных) узлов сооружения:

$$\left[U^+(t)\right]=\begin{bmatrix} U(t) \\ U_b(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Введем столбец жестких перемещений сооружения вместе с платформой, имеющий аналогичную структуру и размер:

$$\left[U^R(t)\right]=\begin{bmatrix} R \\ R_b \end{bmatrix} u_0(t) \tag{2}$$

Столбцы жестких смещений R и R_b формируются по строкам для каждого узла в отдельности (по одному и тому же правилу для всех узлов – и на фундаменте, и выше) и зависят только от координат этого узла и от направления движения платформы. Для поступательных направлений движения платформы они не зависят от координат. В простейшем случае, когда поступательное направление движения платформы совпадает с одной из осей системы координат, в столбцах R и R_b остаются только нули и единицы. Зависимость от координат узлов появляется для вращательных движений платформы (качательных или крутильных) [4].

Теперь введем столбец относительных перемещений как разность между полными и жесткими перемещениями, введенными выше:

$$X^+(t)=U^+(t)-U^R(t)= \\ =\begin{bmatrix} X(t) \\ X_b(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U(t)-R\,u_0(t) \\ U_b(t)-R_b\,u_0(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Из принятого выше условия жесткого движения платформы следует, что относительные перемещения узлов подошвы фундамента/платформы равны нулю: $X_b(t)=0$.

Теперь рассмотрим матрицы жесткости K^+, демпфирования C^+ и инерции M^+, которые изначально в методе конечных элементов составляются для всех узлов, включая узлы на подошве фундамента (закрепление узлов, попавших на платформу, происходит потом). Все три указанные выше матрицы симметричны и имеют одинаковую структуру, которую мы распишем на примере матрицы инерции:

$$\left[M^+\right]=\begin{bmatrix} M & M_{sb} \\ M_{bs} & M_{bb} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Отметим, что при использовании в МКЭ диагональных (не согласованных) матриц масс конечных элементов внедиагональные блоки матрицы в правой части (4) равны нулю. При использовании же согласованных матриц масс они нулю не равны. Отметим также, что все три указанные матрицы с верхним индексом + относятся к безопорной системе.

Уравнение движения рассматриваемой линейной системы в неподвижной системе координат имеет вид

$$\left[M^+\right]\left[\ddot{U}^+(t)\right]+\left[C^+\right]\left[\dot{U}^+(t)\right]+ \\ +\left[K^+\right]\left[U^+(t)\right]=\left[Q^+(t)\right] \tag{5}$$

Нетривиальным здесь является только вектор внешних сил $Q(t)$. Физическая природа его проста – для всех узлов, не лежащих на платформе, он равен нулю, а для узлов, лежащих на платформе, он должен быть таким, чтобы обеспечить ранее заданное движение этих узлов $[U_b(t)] = [R_b]\,u_0(t)$:

$$\left[Q^+(t)\right]=\begin{bmatrix} 0 \\ Q_b(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Как мы увидим дальше, определять этот вектор нам и не понадобится, поскольку движение соответствующих узлов известно.

Теперь начнем преобразовывать уравнение (5). Сначала используем разложение (3) полных перемещений U^+ в сумму жестких перемещений U^R и относительных перемещений X^+. Относительные перемещения и их производные по времени оставим в левой части, а жесткие перемещения и их производные по времени перенесем в правую часть уравнения:

$$\left[M^+\right]\left[\ddot{X}^+(t)\right]+\left[C^+\right]\left[\dot{X}^+(t)\right]+\left[K^+\right]\left[X^+(t)\right]= \\ =\left[Q^+(t)\right]-\left[M^+\right]\left[R^+\right]\ddot{u}_0(t)- \\ -\left[C^+\right]\left[R^+\right]\dot{u}_0(t)-\left[K^+\right]\left[R^+\right]u_0(t) \tag{7}$$

Пока преобразования были чисто формальными и потому математически точными. Но здесь мы сделаем остановку и обратимся к инженерной логике. Последний член в правой части (7) содержит произведение матрицы жесткости безопорной системы K^+ на столбец жестких смещений этой системы R^+. По физическим соображениям это произведение должно быть равно нулю при любой матрице жесткости: жесткие статические смещения безопорной системы не вызывают внутренних усилий.

Теперь применим ту же логику к предпоследнему слагаемому в правой части (7). Как известно, демпфирование бывает внутренним и внешним. В нашем случае мы традиционно рассматриваем чисто внутреннее демпфирование (т. е. «трения о воздух» здесь нет). Осторожное слово «традиционно» автор вставил потому, что в атомной энергетике, в которой он работает, есть особый класс задач о реакции погруженных в бассейны с жидкостью конструкций на динамические воздействия, – вот там для погруженных конструкций появляется как раз внешнее демпфирование (условно говоря, «трение о воду»). Но, повторюсь, в рассматриваемом традиционном случае внешнего демпфирования нет – это значит, что произведение матрицы C^+ на столбец R^+ равно нулю.

И здесь сделаем еще одно принципиально важное замечание. Если мы запишем матрицу демпфирования на основе любой физической модели (скажем, поставив вязкие демпферы между узлами), то мы получим физически обоснованный результат: на жестких перемещениях безопорной системы такое демпфирование не работает (т.е. дает нулевые демпфирующие силы). Если же мы попытаемся на этом этапе применить рэлеевскую модель демпфирования для матрицы демпфирования в правой части (7), т.е. разложим эту матрицу в линейную комбинацию матрицы масс и матрицы жесткостей, то мы получим физически недостоверный результат. Матрица жесткостей в рэлеевской формуле, как и положено по физической логике, после умножения на столбец жестких смещений даст ноль (об этом уже говорилось), но матрица масс в рэлеевской формуле после аналогичного умножения ноль не даст. Это известный «врожденный порок» рэлеевской модели демпфирования: физически она не совсем «внутренняя» из-за использования матрицы масс. Но физическая логика, по убеждению автора этих строк, важнее математических моделей, поэтому мы должны приравнивать нулю предпоследний слагаемый в правой части (7) ДО ТОГО, как попытаемся конкретизировать вид матрицы демпфирования (по Рэлею или еще как-то). В итоге правая часть (7) приводится к более простому виду, и вместо (7) мы имеем:

$$\begin{aligned}&\left[M^+\right]\left[\ddot{X}^+(t)\right]+\left[C^+\right]\left[\dot{X}^+(t)\right]+\left[K^+\right]\left[X^+(t)\right]=\\&=\left[Q^+(t)\right]-\left[M^+\right]\left[R^+\right]\ddot{u}_0(t)\end{aligned}\qquad(8)$$

Теперь сделаем следующий шаг – отбросим в (8) последние уравнения, относящиеся к движению узлов на платформе. Главное для нас – аккуратно учесть все члены в оставшихся уравнениях. В левой части (8) нижняя часть столбца относительных перемещений вместе с их производными по времени тождественно равна нулю – в матричных произведениях она не даст вклада в оставшиеся уравнения. Это означает, что в левой части (8) мы можем просто убрать верхний индекс «+» как во всех трех матрицах, так и в столбцах, на которые они умножаются. Теперь обратимся к правой части (8). В первом слагаемом верхняя часть столбца внешних сил $[Q^+]$, как указывалось выше в (6), равна нулю (безопорные узлы не нагружены внешними силами). Нижняя ненулевая часть столбца внешних сил просто выбрасывается вместе с соответствующими уравнениями. А вот второй слагаемый в правой части (8) придется просто честно расписать по правилам матричного умножения. В итоге получится новое матричное уравнение движения с уменьшенными размерами всех матриц и столбцов:

$$\begin{aligned}&\left[M\right]\left[\ddot{X}(t)\right]+\left[C\right]\left[\dot{X}(t)\right]+\left[K\right]\left[X(t)\right]=\\&=-\left(\left[M\right]\left[R\right]+\left[M_{sb}\right]\left[R_b\right]\right)\ddot{u}_0(t)\end{aligned}\qquad(9)$$

В. А.Семенов совершенно справедливо указывает на то, что последний член в правой части (9) чаще всего просто бездумно выбрасывается. Это было справедливо для диагональной матрицы масс, но несправедливо для согласованных матриц масс. Автор хотел бы в этой связи уточнить, что выбрасываемый член добавляет нагрузки только для узлов нижнего ряда, непосредственно связанных массивными конечными элементами с узлами на платформе. При переходе от диагональной матрицы масс к согласованной матрице масс одновременно с появлением рассматриваемого ненулевого недиагонального элемента матрицы масс уменьшается диагональная масса в соответствующем узле. Поскольку сумма элементов матрицы масс по строкам сохраняется, есть подозрение, что погрешность при этом не очень велика, - т.е. нагрузка в правой части (9) при переходе от диагональной матрицы масс к согласованной матрице масс примерно сохранится. Другое дело, что в левой части (9) при таком переходе матрица масс несколько изменится, что приведет к сдвигу собственных частот с соответствующими последствиями. Любопытно было бы увидеть конкретные примеры сравнения результатов для реальных конструкций.

Принципиальное расхождение между автором и В. А. Семеновым заключается в том, что автор не видит в правой части (9) никакого присутствия демпфирования, о котором написано в [1,2], «даже для простых случаев». Разберем отличия предметно, опираясь на статью В.А. Семенова [2], где расписаны формулы. К формулам, замечу, претензий нет. Авторы [2] не выбрасывают демпфирующий член из правой части, а оставляют его вплоть до формулы (33), где они для жесткого движения опорных узлов вычисляют коэффициенты «сейсмического возмущения по демпфированию», равные (обозначения [2], приводится только один коэффициент для примера)

$$\Gamma^C_{j,u,x}=\varphi^T(C\,R+C_{uv})\,r_{u,x}\qquad(10)$$

Столбец $r_{u,x}$ в данном случае совпадает с введенным выше столбцом R_b – он описывает перемещения опорных узлов для случая, когда все эти опорные узлы смещаются на единицу вдоль оси O_x. Далее, произведение R $r_{u,x}$ в правой части формулы (10) совпадает с введенным ранее в настоящей статье вектором R (в статье [2] обозначение R используется по-другому, чем в настоящей статье). Это произведение имеет смысл смещений незакрепленных узлов при жестком смещении всех опор на единицу вдоль оси Ох (т.е. при перемещении опор, описываемом столбцом $r_{u,x}$). Как мы понимаем, в данном простом случае одноопорного закрепления это смещение незакрепленных узлов по физическим соображениям тоже является «жестким». Но тогда оказывается, что произведение $(C\,R + C_{u,v})\,r_{u,x}$ в правой части (10) имеет физический смысл сил демпфирования, действующих на незакрепленные узлы при жестком смещении всех узлов вместе с опорами (т. е. практически жестко смещается безопорная система) с единичной скоростью вдоль оси Ох. Однако, если физически это силы внутреннего демпфирования, то, как отмечалось выше, при жестком перемещении безопорной системы с любой скоростью они тождественно равны нулю по физическим соображениям, т. е. введенные в [2] «коэффициенты сейсмического возмущения по демпфированию» должны быть равны нулю (все шесть). Авторы [2] не замечают и не используют этот факт, оставляя эти члены в дальнейших выкладках, – на это они пока имеют полное право. Но далее на странице 17 они совершают именно ту ошибку, о которой автор этих строк писал выше, – применяют к этим оставленным в правой части демпфирующим членам пропорциональное (оно же рэлеевское) демпфирование. В этот момент, как и указано выше, физический смысл утрачивается из-за участия в пропорциональном демпфировании матрицы масс – она «работает» на жестких перемещениях. После этого все рассуждения о вкладе демпфирования из правой части уравнений движения в реакцию, на мой взгляд, автоматически обесцениваются.

Следует отметить, что в американских Стандартах [5] член с матрицей демпфирования в правой части уравнения движения отсутствует – как и должно быть по физическому смыслу.

Здесь сделаем еще одно замечание. Уравнение (5) можно попытаться решать в абсолютных перемещениях, проведя такое же выбрасывание уравнений, связанных с движением точек на платформе, как проведено выше. Получится уравнение

$$\begin{aligned}&[M]\left[\ddot{U}(t)\right]+[C]\left[\dot{U}(t)\right]+[K]\left[U(t)\right]=\\&=-\left[M_{sb}\right]\left[R_b\right]\ddot{u}_0(t)-\left[C_{sb}\right]\left[R_b\right]\dot{u}_0(t)-\left[K_{sb}\right]\left[R_b\right]u_0(t)\end{aligned}\qquad(11)$$

Это уравнение является не менее строгим, чем (5), и должно давать достоверные результаты. Автор этих строк использует его в своем комбинированном асимптотическом методе (использует без массы в правой части, т. к. грунтовое основание и сооружение не связаны по массе) [4]. Казалось бы, вот оно – демпфирование в правой части. Однако, если попробовать ввести в (11) рэлеевское представление матрицы демпфирования, то окажется, что матрица масс в нем снова «работает» не только на относительных, но и на жестких перемещениях (причем как в левой, так и в правой части), и мы снова получим физически не совсем достоверные результаты. Именно поэтому автор при использовании уравнения (11) отказался от рэлеевского демпфирования, перешел в частотный диапазон и принял там более удобные модели, сохраняющие физический смысл.

Вывод такой: ввиду известных «родимых пятен» рэлеевской модели демпфирования применять ее лучше только к относительному движению. Применение же ее с абсолютными скоростями ведет к большим погрешностям. Конечно, особым случаем является отказ от «жесткого» движения платформы (в простейшем случае – переход к многоопорному воздействию). Но здесь надо возвращаться к уравнению (5). Само понятие «относительного» движения становится непростым, т.к. прежнее «жесткое» движение сооружения вместе с платформой (относительно которого вычислялись перемещения X) теперь пропадает, поскольку сама платформа теперь движется «не жестко». Здесь могут использоваться различные методы. Один из них – замена «жесткого» движения на квазистатическое движение сооружения вместе с опорами. Такое движение, в отличие от жесткого движения, порождает внутренние усилия, в т. ч. и от демпфирования, так что последние два слагаемых в правой части (7) больше не равны нулю. Другой способ – выбор одной из опор в качестве «основной», использование жесткого движения вместе с нею и трактовка относительного движения остальных опор в качестве дополнительных воздействий. Не будем разбирать здесь эти методики подробно – в любом случае это не те «простейшие ситуации», о которых пишет В. А. Семенов.

Однако исчерпаны ли вопросы к рассмотренному выше простейшему случаю жесткой платформы? Нет! Продолжим работу с уравнением (9) - перенесем в правую часть первый член из левой части:

$$\begin{aligned}&[C]\left[\dot{X}(t)\right]+[K]\left[X(t)\right]=\\&=-[M]\left(\left[R\right]\ddot{u}_0(t)+\left[\ddot{X}(t)\right]\right)-\left[M_{sb}\right]\left[R_b\right]\ddot{u}_0(t)\end{aligned}\qquad(12)$$

В сущности, перед нами – уравнение равновесия в момент времени t: в правой части мы видим инерционные нагрузки в узлах (в круглых скобках, как легко заметить, – абсолютные ускорения узлов), а в левой части – силы, приходящие в узлы в результате деформации конструкций. И вот тут, на взгляд автора, происходит некая подмена – точнее, молчаливое введение нового допущения. Предположим, мы достоверно определили абсолютные ускорения всех узлов и соответствующие инерционные нагрузки в правой части (12). Но никто на практике не собирается решать дифференциальное уравнение (12) первого порядка с этими нагрузками – вместо этого первый член в левой части (12) просто выбрасывается, а затем решается статическая задача с теми же нагрузками в правой части (12), из которой и определяются усилия в конструкциях в заданный момент времени.

Насколько велика вносимая при этом погрешность? В консольных стержневых моделях, с которых «все начиналось», погрешности в определении интегральных поэтажных усилий практически не было. Как и во всякой статически определимой системе, внешние нагрузки однозначно определяли распределение внутренних усилий вне зависимости от жесткостей. Таким образом, интегральные силы на всех этажах определялись в каждый момент времени практически достоверно. Поскольку сам этаж «набирался» из отдельных вертикальных конструкций (стен и колонн), распределение интегральных сил между этими конструкциями проводилось пропорционально их жесткостям. Демпфирование при этом не учитывалось.

Сегодня модели сооружений стали более сложными, статически неопределимыми. В узлах сходятся конструкции с разным демпфированием. Перекрытия податливые. Можем ли мы по-прежнему оставлять определение внутренних усилий на решение статической задачи без разделения двух составляющих в левой части (12)? Не уверен. Хотелось бы вынести этот вопрос на обсуждение и услышать мнение коллег.

Но дальше делается еще одно спорное, на взгляд автора, упрощение. Уравнение (12) написано для момента времени t. Однако в линейно-спектральном подходе время в явном виде не учитывается – совершается переход к работе с максимальными по модулю значениями. Сразу отметим, что этот переход приближенный, так что «абсолютной истины» в формулах больше нет, – однако есть более обоснованные или менее обоснованные подходы. Более обоснованный, на взгляд автора, подход расписан в нормах ASCE [5]. Сначала требуется вычислить максимальные модальные реакции в терминах обобщенных координат при фиксированных направлениях воздействия. Здесь появляются спектральные ускорения и коэффициенты участия форм. Отметим, что в этот же момент происходит переход от относительных ускорений к абсолютным ускорениям, поскольку из «жесткого» движения тоже вычленяется вклад рассматриваемой формы. Спектральное ускорение – это абсолютное, а не относительное ускорение. После определения одномодальной реакции в терминах обобщенных координат требуется вычислить соответствующие ей максимальные ускорения во всех узлах (в общем случае в разных направлениях в соответствии с каждой конкретной формой). Далее требуется приложить соответствующие «одномодальные» инерционные нагрузки и путем решения статической задачи ВЫЧИСЛИТЬ МАКСИМАЛЬНЫЕ ОДНОМОДАЛЬНЫЕ УСИЛИЯ в конструкциях по фиксированным формам при фиксированных направлениях воздействия. Заметим, что при этом предыдущий вопрос о разделении составляющих в левой части (12) снимается, – при одномодальной реакции момент достижения максимальных нагрузок и максимальных усилий совпадает; в этот момент относительные перемещения достигают максимума, а относительные скорости равны нулю, так что при выбрасывании первого слагаемого в левой части (12) погрешности не возникает. Статическая задача об определении усилий решается для каждой формы в отдельности (разумеется, матрицу жесткостей можно обратить один раз и далее умножать ее на столбец внешней нагрузки, вычисляемый заново для каждой формы). Далее надо СУММИРОВАТЬ ОДНОМОДАЛЬНЫЕ УСИЛИЯ ПО ФОРМАМ при фиксированных направлениях воздействия, рассматриваемых пока по отдельности, и лишь затем суммировать полученные усилия ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ВОЗДЕЙСТВИЯ. Если бы и то, и другое суммирование проводились бы по правилу ККСК (квадратный корень из суммы квадратов), порядок суммирования был бы не важен; однако он становится важным при специальных правилах суммирования максимумов, уставленных нормами [5]. Снова отметим, что оба правила суммирования носят приближенный статистический характер – существуют разные их варианты, и нет «абсолютной истины».

Однако в последнее время приходится видеть попытки, как говорится, «сократить басню». Первые этапы расчета – такие же, как описано выше. Но после вычисления одномодальных максимальных ускорений в узлах предлагается вычислить суммарные максимальные ускорения в узлах при фиксированном направлении воздействия, суммируя максимальные ускорения по всем формам (по определенным правилам, являющимся обобщением правила ККСК). Такой подход вполне оправдан и не вызывает возражений, если целью расчета является определение максимальных модулей узловых ускорений; при этом, естественно, теряется знак максимального ускорения в узле – остается только его модуль.

Далее наступает самый спорный момент: после определения максимальных модулей суммарных узловых ускорений авторы «сокращенного варианта» предлагают умножить их на узловые массы и приложить соответствующие суммарные инерционные нагрузки в узлах (естественно, теперь все они будут направлены в одну сторону). Далее предлагается решить статическую задачу с этими суммарными инерционными нагрузками - один раз для одного направления воздействия – определив в результате усилия в конструкциях. Таким образом, вместо суммирования одномодальных усилий в конструкциях суммируются одномодальные инерционные нагрузки в узлах. Экономится время на решение статических задач – вместо решения для каждой формы статическая задача решается один раз для одного направления сейсмического воздействия. Однако автору это представляется, по меньшей мере, спорным. Несложно построить модель из двух разных простых осцилляторов на общей платформе, соединенных очень податливой связью, не влияющей на колебания. В такой модели максимальные усилия в этой податливой связи будут достигаться в момент разнонаправленных движений разных осцилляторов. Предлагаемый же «сокращенный» вариант предполагает приложение всех инерционных нагрузок в одном направлении, что приведет к неконсервативным результатам.

Покажем это предметно. Схема такой модели представлена на рис.1.

Для простоты будем рассматривать однонаправлен-

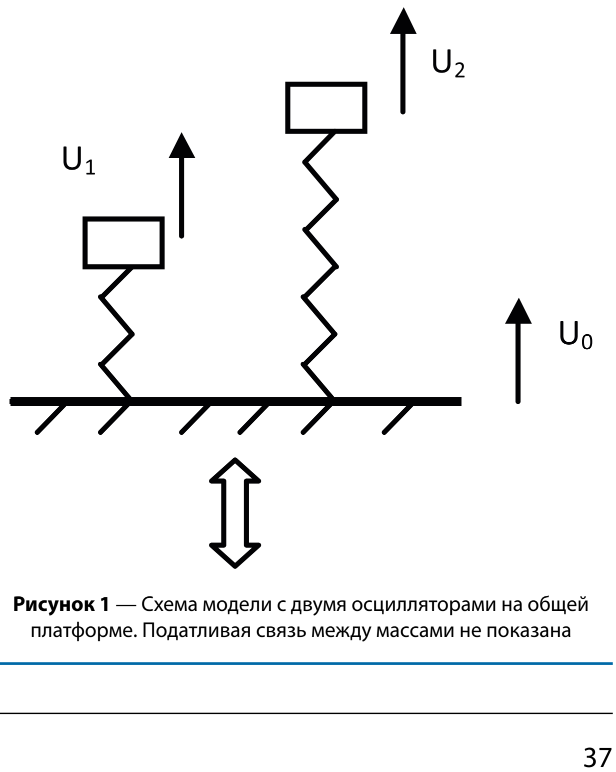

Рисунок 1 — Схема модели с двумя осцилляторами на общей платформе. Податливая связь между массами не показана

ное движение и пренебрежем демпфированием: осцилляторы характеризуются массами M_j и жесткостями пружин K_j (j = 1,2). Жесткости и массы определяют собственные частоты $\omega_j = (K_j/M_j)^{1/2}$. Пусть для определенности $\omega_2 > \omega_1$. Будем считать, что эти частоты достаточно разнесены между собой, чтобы использовать правило ККСК для сложения одномодальных реакций. Понятно, что собственные частоты осцилляторов окажутся собственными частотами всей системы. Собственные формы, нормированные к массам, а также соответствующие матрицы и коэффициенты «расщепятся» и будут иметь вид

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{M_1} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{M_2} \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix};$$

$$\Gamma_j = \varphi_j^T M\ R = \sqrt{M_j}, (j = 1,2)$$

Для узла k и формы j

$$\eta_{kj} = \varphi_{kj}\ \Gamma_j = \delta_{kj} \tag{13}$$

Максимальные абсолютные ускорения в форме j будут равны $S_a(\omega_j)$ для массы j и нулю для другой массы (j = 1,2). Они определят инерционные нагрузки. Максимальные по модулю «одномодальные» относительные перемещения в форме j будут равны $S_a(\omega_j)/\omega_j^2$ в массе j и нулю в другой массе.

Пусть искомая реакция определяется разностью перемещений двух масс (та самая податливая связь). В каждой форме одно перемещение равно нулю, так что модуль разницы равен модулю ненулевого перемещения. По полному варианту линейно-спектральной теории максимальная разница перемещений сложится из двух указанных выше максимальных перемещений по правилу ККСК:

$$\max|U_1 - U_2| = \{\left[\frac{S_a(\omega_1)}{\omega_1^2}\right]^2 + \left[\frac{S_a(\omega_2)}{\omega_2^2}\right]^2\}^{1/2} \tag{14}$$

В «сокращенном варианте» мы должны сначала просуммировать инерционные нагрузки по разным формам (это легко, т. к. в этой сумме в каждой массе один из слагаемых равен нулю). Затем мы приложим полученные суммарные инерционные нагрузки одновременно в одном направлении и получим для масс все те же относительные перемещения. Но теперь эти перемещения в статической задаче рассматриваются вместе. Они, как и инерционные нагрузки, направлены одинаково, поэтому их разность составит

$$\max|U_1 - U_2| = \left| \left[\frac{S_a(\omega_1)}{\omega_1^2}\right] - \left[\frac{S_a(\omega_2)}{\omega_2^2}\right] \right| \tag{15}$$

Как видим, результат (15) заведомо меньше результата (14).

Теперь поговорим о консерватизме результатов. Зададим в качестве воздействия моногармоническое воздействие с частотой ω_0 и амплитудой перемещений U_0, модулированное очень низкочастотной огибающей (пример такого «почти гармонического» воздействия конечной продолжительности приводился в [6]). Преимущество такого воздействия в том, что реакции с высокой точностью можно определять аналитически, как для гармонического воздействия. Тогда

$$S_a(\omega_j) = U_0 \frac{\omega_0^2\ \omega_j^2}{|\omega_j^2 - \omega_0^2|}; \quad \frac{S_a(\omega_j)}{\omega_j^2} = U_0 \frac{\omega_0^2}{|\omega_j^2 - \omega_0^2|} \tag{16}$$

Это дает нам возможность вычислить результаты по формулам (15) и (16). Но мы можем и аналитически посчитать разность перемещений с учетом знаков и получить

$$\max|U_1 - U_2| = U_0 \left| \left[\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2 - \omega_0^2}\right] - \left[\frac{\omega_0^2}{\omega_2^2 - \omega_0^2}\right] \right| \tag{17}$$

Казалось бы, эта формула очень похожа на формулу (15) после подстановки в нее спектральных ускорений (16). Но в (15) под знаком модуля будет стоять разность двух положительных чисел, а в формуле (17) – разность тех же чисел, но с учетом знаков. При попадании несущей частоты воздействия ω_0 между собственными частотами осцилляторов ω_1 и ω_2 окажется, что модули двух слагаемых в (17) складываются, а в (15) – вычитаются. Таким образом, результат «сокращенного варианта» окажется неконсервативным. При попадании несущей частоты воздействия за пределы «опасного» диапазона между двумя собственными частотами осцилляторов результат «сокращенного» варианта будет точным.

Физический смысл происходящего очень прост. Когда несущая частота воздействия меньше обеих собственных частот осцилляторов, обе массы движутся в фазе с воздействием, а следовательно, в фазе друг с другом. Когда несущая частота воздействия больше обеих собственных частот осцилляторов, обе массы движутся в противофазе к воздействию, а следовательно, снова оказываются в фазе друг с другом. В обоих случаях при вычислении интересующей нас разницы в перемещениях масс модули двух перемещений вычитаются друг из друга. Зато при попадании несущей частоты воздействия в «опасный» интервал между двумя собственными частотами осцилляторов масса осциллятора с меньшей собственной частотой уже движется в противофазе с воздействием, тогда как масса второго осциллятора (с большей собственной частотой) все еще движется в фазе с воздействием. Таким образом, две массы осцилляторов движутся в противофазе друг к другу, так что при вычислении интересующей нас разницы в перемещениях модули двух перемещений складываются, а не вычитаются. Именно этот эффект разнонаправленности движений не учитывается в «сокращенном» варианте.

Заметим, что и формула (14) для полного варианта в данном случае даст неконсервативный результат для «опасного» диапазона несущих частот воздействия, но степень неконсерватизма при этом будет намного меньше. Физически причина неконсерватизма формулы (14) в том, что примененное в ней правило ККСК рассчитано на суммирование статистически независимых одномодальных реакций; в рассматриваемом же случае реакции, как и воздействие, практически моногармонические, так что корреляция одномодальных реакций полная (противофазность, так же как и синфазность, означает полную корреляцию). При полной корреляции положено применять суммирование по модулю – оно даст точный результат в «опасном» диапазоне несущих частот воздействия (между двумя собственными частотами осцилляторов).

С другой стороны, обещаемая «сокращенным вариантом» экономия в вычислениях велика. Возможно, она имеет некое статистическое оправдание, несмотря на наличие опровергающих примеров, подобных приведенному выше. И здесь хотелось бы услышать мнение коллег о допустимости такого подхода.

Завершая, хочется еще раз сказать о полезности подобных упражнений. Прежде чем погружаться в сложные компьютерные расчеты, хотелось бы выверить базовые предпосылки. Как учили нас в молодости, количество переходит в качество: возрастание сложности моделей делает неприменимыми часть исходных предпосылок, явно или неявно заложенных в традиционные расчетные методики, начиная с уравнений движения. Отследить эти изменения, правильно на них среагировать – наша общая задача. Буду рад узнать мнение коллег по поставленным в статье вопросам.

Литература

1. Семенов В. А., Лебедев В. Л., Баглаев Н. Н. Современные компьютеро-ориентированные модели для динамических расчетов строительных конструкций с использованием пространственных моделей сейсмического воздействия. Возможности использования в нормах сейсмостойкого строительства нового поколения // Тезисы докладов Евразийского Форума по сейсмической безопасности сооружений и городов SEISMO-2017. Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2017. № 6. С.67.

2. Семенов В.А., Лебедев В. Л., Солдатов А.Ю. Об учете демпфирования при расчетах пространственных сооружений на сейсмические воздействия // Справочник. Инженерный журнал. 2013. № 5. С.12-20.

3. Тяпин А.Г. Платформенные модели в задачах учета взаимодействия сооружений с основанием при расчетах на сейсмические воздействия. Научное издание. М.: Издательство АСВ. 2015. 208 с.

4. Тяпин А. Г. Расчет сооружений на сейсмические воздействия с учетом взаимодействия с грунтовым основанием. Научное издание. М.: Издательство АСВ. 2013. 392 с.

5. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE4-98. Reston, Virginia, USA. 1999.

6. Тяпин А.Г. Демпфирование в прямом и модальном методах. Часть II: замена материального демпфирования в сооружении рэлеевским демпфированием // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2013. №1. С.21-28.

Материалы хранятся по адресу:
105005, г. Москва, Бакунинская ул.,7, стр.
(АО «Атомэнергопроект»)
тел.: (499)267-35-03, e-mail: atyapin@bvcp

TYAPIN A., D. Sc., JSC "Atomenergoproject", Moscow

CONTRIBUTION OF DAMPING TO THE DYNAMIC LOADS IN SEISMIC ANALYSIS

Abstract

Development of linear equations of motion for seismic analysis is discussed in the paper. Surprisingly, there are still some non-trivial issues. The paper is a polemic one: the author does not agree with colleagues putting damping matrix into the right-hand part of the equation of motion. In the author's opinion, the mistake is in the implementation of the Rayleigh damping model for the right-hand part of the equation. This is in the contradiction with physical logic, as damping in the Rayleigh model is not really "internal": due to the participation of the mass matrix it works on rigid displacements, which is impossible for internal damping. The author is sure that physical logic should have a priority against any approximate mathematical model, so the contribution of the internal damping to the right-hand part of the equation shall be excluded before this or that model of internal damping is chosen. Besides, the author asks two more questions about the internal forces calculations. He hopes to get response from the colleagues on these issues.

Keywords: *seismic response, Rayleigh damping model, linear spectral analysis, combination of maximal responses.*

References

1. Semenov V. A., Lebedev V. L., Bagdlaev N. N. Modern computer-oriented models for dynamic analysis of structures using spatial model of seismic excitation. Possible implementation in the new generation of seismic codes // Thesis of Eurasian Forum on Seismic Safety of Structures and Cities SEISMO-2017. Natural and Technology Risks. Structural Safety. 2017. No. 6. P.67.

2. Semenov V. A., Lebedev V. L., Soldatov A.Yu. Accounting for damping effects in seismic analyses of spatial structures // Handbook. Engineering journal. 2013. No. 5. P.12-20.

3. Tyapin A.G. Platform models in soil-structure interaction problems of seismic analysis. Scientific edition. Moscow: ASV. 2015. 208 p.

4. Tyapin A.G. Seismic analysis of structures considering soil-structure interaction. Scientific edition. Moscow: ASV. 2013. 392 p.

5. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE4-98. Reston, Virginia, USA. 1999.

6. Tyapin A.G. Damping in direct and modal approaches. Part II: substitution of material damping by Rayleigh damping // Earthquake engineering. Structural Safety. 2013. No.1. P.21-28.

Для цитирования: Тяпин А. Г. О роли демпфирования в динамических нагрузках при расчете на сейсмические воздействия //Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2018. № 1. С. 33-39.

For citation: Tyapin A.G. Contribution of damping to the dynamic loads in seismic analysis // Earthquake engineering. Constructions safety. 2018. № 1. С. 33-39.